Дмитриевский В.А.,соискатель
Научный руководитель Иваницкий С.В., доцент кафедры ИТ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО КООРДИНАТЕ В МОДЕЛЯХ ЛАД

Применение теории рядов Фурье к выводу формул численного дифференцирования по координате функций, характеризующих пространственное распределение электромагнитных параметров машины, позволяет уменьшить ошибку численного дифференцирования.

В настоящее время наиболее распространенным является подход, при котором используются формулы центрально-разностной аппроксимации производной с точностью до второго порядка. Однако для области малых скольжений ошибка численного дифференцирования по координате становится неприемлемой. Ранее использовались формулы конечно-разностной аппроксимации производной с точностью до четвёртого и шестого порядков, что существенно уменьшало ошибку.

В уравнении электрической цепи вторичного элемента рассматриваемых моделей ЛАД численное дифференцирование по координате выполняется при вычислении полной производной вектора магнитных потоков и при вычислении полной производной вектора токов вторичного элемента.

Рассмотрим некоторые алгоритмы минимизации ошибки дифференцирования, основанные на теории рядов Фурье.

1. В пространственном спектре функций токо- и потокораспределения машины превалируют так называемые основные гармоники, т.е. волны с длиной, равной удвоенному полюсному делению (2p), которые представляют собой суперпозицию синусоид $f_1(x)=\cos\frac{\pi x}{p}$ и $f_2(x)=\sin\frac{\pi x}{p}$. Поэтому ошибку дифференцирования можно существенно уменьшить, если потребовать, чтобы основные гармоники дифференцировались точно.

Приведем разностную формулу аппроксимации производной, значение которой совпадает с аналитическим выражением для производной при дифференцировании основной гармоники:

$$f'(x_n)=\frac{\pi}{2p\sin\frac{\pi t_z}{p}}\left(f(x_{n+1})-f(x_{n-1})\right)$$

В матрице дифференцирования, соответствующей этой формуле, заполненными оказываются только две диагонали, ближайшие к главной.

2. Однако при скоростях вторичного элемента ЛАД близкой к синхронной скорости, возрастает роль других гармоник. Тем самым дальнейший путь минимизации ошибки — применение формулы, значение которой совпадает с аналитическим выражением для производной при дифференцировании любой суперпозиции гармоник $e^{\frac{ikx}{t_z}}$ с k, принимающим значения из интервала $[-\pi,\pi]$.

Заметим, что случай $k=\pi$ означает самую короткую длину волны $2t_z$, которую имеет смысл учитывать при дискретизации модели до уровня зубцового деления.

Такая формула имеет вид:

$$f'(x_n) = -\frac{1}{t_z}\sum_{m\neq n}\frac{(-1)^{m-n}}{m-n}f(x_m).$$

К сожалению, этой формуле соответствует полностью заполненная матрица дифференцирования. Для уменьшения объёмов вычислений разработаны специальные формулы дифференцирования на основе различных допущений об особенностях фурье-образа функций токо- и потоко-распределения.

Рассмотрим теперь разностные формулы численного дифференцирования по 2Q-точкам вида:

$$f'(x_n) = \frac{1}{t_z}\sum_{m-n\leq Q} a_{m-n} f(x_m),$$ причём $a_n = a_{-n}$.

Коэффициенты a_n определяются исходя из огрубляющих предположений.

В матрице дифференцирования, соответствующей такой формуле, заполняются только по Q диагоналей, ближайших к главной.

3. Широкополосная формула дифференцирования по 2Q-точкам наилучшим образом аппроксимирует Фурье-образ оператора дифференцирования в смысле среднеквадратичного отклонения:

$$f'(x_n) = -\frac{1}{t_z}\sum_{\substack{m\neq n\\ n-m<Q}}\frac{(-1)^{m-n}}{m-n}f(x_m)$$

4. Коэффициенты формулы дифференцирования по 2Q-точкам, точно дифференцирующей основную гармонику $e^{\frac{ik_0x}{t_z}}$. $k_0 = \frac{\pi t_z}{d}$ и наилучшим образом аппроксимирующей фурье-образ оператора дифференцирования, находятся следующим образом:

$$\lambda = \frac{k_0 + 2\sum_{n=1}^{Q}\frac{(-1)^n}{n}\sin(k_0 n)}{2\sum_{n=1}^{Q}\sin^2(k_0 n)},$$

$$a_n = -\frac{(-1)^n}{n} + \lambda\sin(k_0 n)$$

Формулы переходят в формулу 1 при Q=1.

Выбор формулы дифференцирования зависит от особенностей фурье-образа функций токо- и потокораспределения. В работе предлагается несколько алгоритмов численного дифференцирования. Какой из них лучший — покажет время.